Geometrik Dağılım

Arka arkaya n kez tekrarlanan bir Bernoulli deneyi ele alınsın ve ilk istenen sonucun elde edilmesi için yapılan deney sayısı X olsun. X'e geometrik rastgele değişken denir. Binom dağılımında istenen sonuçların sayısı bir rastgele değişken iken geometrik dağılımda istenen sonucun sayısı 1'e eşi olmalıdır. Deneylerin sayısı ise rastgele değişkendir.
Örneğin, hedefe atış yapan bir nişancının hedefi ilk kez vurması için gereken atış sayısı, bir para yazı gelinceye kadar atıldığında ilk yazı gelene kadar yapılan denemelerin sayısı geometrik rastgele değişkendir.

TANIM: İlk (x-1) deneyin istenen sonucu vermemesi ve x-inci deneyin istenen sonucu vermesi durumunda geometrik dağılım aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$P(X=x)=\begin{cases} p.q^{x-1}, & x=1,2,3,\ldots \\ 0, & dd \end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

$$V(X)=\frac{q}{p^2}$$

ÖRNEK: Bir zarı 4 elde edinceye kadar atalım.

a) Bağımsız atışlar dizisinde ilk 4'ün elde edilmesi için gerekli atışların sayısının olasılık fonksiyonunu bulunuz.
b) 2 denemede 4 elde etme olasılığını bulunuz.
c) Beklenen değer ve varyansı bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}.\frac{5}{6}^{x-1}, & x=1,2,3,\ldots \\ 0, & dd \end{cases}$

b) $f(2)=P(X=2)=\frac{1}{6}.\frac{5}{6}^{2-1}=\frac{5}{36}$

c) $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$

$V(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{5}{6}.\frac{36}{1}=30$

DOÇ. DR. PELİN KASAP

Negatif Binom Dağılımı

Geometrik dağılımın genel şeklidir. Bağımsız bernoulli denemelerin bir dizisinde her bir denemede başarı olasılığı "p" olmak üzere k-ıncı başarının elde edilmesi için gereken denemelerin sayısı X rastgele değişkeni ise "x"e negatif binom rastgele değişkeni denir.
X rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

P(X=x)=$\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$, x=k, k+1, … şeklindedir.

X rastgele değişkeninin; beklenen değeri E(X)= $\frac{k}{p}$, varyansı V(X)=$\frac{k.q}{p^2}$

ÖRNEK: Bir atıcı içi belli bir hedefi vurması olasılığı p=$\frac{3}{4}$= 0,75 olduğu bilinsin. Atıcı hedef 3 isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır.

a) Atıcının 4 atış yapması olasılığı,
b) En çok 4 atış yapması olasılığı,
c) En az 4 atış yapması olasılığı,
d) Beklenen değer ve varyansı bulunuz.

ÇÖZÜM: P(X=x)=$\binom{x-1}{3-1}\left(\frac{3}{4}\right)^3(\frac{1}{4})^{x-3}$, $x = 3,4,5,\ldots$

a) P(X=4)=$\binom{4-1}{3-1}\left(\frac{3}{4}\right)^3(\frac{1}{4})^{4-3}$= $\frac{81}{256}$ = 0,3164
b) P(X≤4)=P(X=3)+P(X=4)=$\binom{3-1}{3-1}\left(\frac{3}{4}\right)^3(\frac{1}{4})^{3-3}$+$\binom{4-1}{3-1}\left(\frac{3}{4}\right)^3(\frac{1}{4})^{4-3}$= $\frac{27}{64}$ + $\frac{81}{256}$ = $\frac{189}{256}$
c) P(X≥4)=1−P(X<4)=1−P(X=3)

=1− $\frac{27}{64}$ = $\frac{37}{64}$ = 0,578

d) E(X)=$\frac{k}{p}$= $\frac{3}{3/4}$= 4

V(X)=$\frac{k.q}{p^2}$ = $\frac{3.\frac{1}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$ =$\frac{4}{3}$

Poisson Dağılımı

En çok kullanılan dağılımlardan biridir. Küçük olasılıklar dağılımı da denir. Belli ve çok dar zaman aralığında az rastlanan olaylar bu tür dağılım gösterirler. Örneğin, Boğaziçi köprüsünde meydana gelen günlük kazaların sayısı, verilen belirli bir zamanda bir şirkette yapılan sigorta isteği sayısı, bir havaalanında her saat kalkan ve inen uçakların sayısı örnek olarak verilebilir.

DOÇ. DR. PELİN KASAP

Bu dağılım sürekli ortamda(zaman, hacim, alan gibi) kesikli sonuçlar veren deneylerin modellenmesinde kullanılır.

Belirli bir zaman aralığında(bir alanda ya da hacimde) başarıların sayısı X rastgele değişkeni olsun. X rastgele değişkeni aşağıdaki koşulları sağlarsa Poisson rastgele değişkeni adını alır.

1. İki ayrık zaman aralığında ortaya çıkan olaylar birbirinden bağımsızdır.
2. Tanımlanan aralıkta(ya da uzayda) ilgilenilen olayın ortaya çıkma olasılığı sabit olup değişmemektedir.
3. X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu;

   P(X=x)=$\frac{\lambda^x}{X!}.e^{-\lambda}$,   x=0,1,2, … , λ>0 şeklindedir.

   λ verilmemiş ise λ=n.p ile bulunur.

   E(X)=V(X)=λ

ÖRNEK: Bir sigorta şirketinin araştırmalarına göre kasko sigortası yaptıranlaraın %0,5 nin bir yıl içerisinde kaza geçirdiği görülmüştür.

a) Sigorta şirketinin sigortaladığı 1000 kişiden 3 tanesine bu yıl içinde ödeme yapma olasılığını bulunuz.
b) Şirketin bu 1000 kişiden en az 2 kişiye ödeme yapma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM: n=1000

p=$\frac{0,5}{100}$ λ=n.p=1000.$\frac{0,5}{100}=5$

a) P(X=3)=$\frac{5^3}{3!}.e^{-5}$=0,14
b) P(X≥2)=1−P(X<2)

   $=1-[P(X=0+P(X=1)]$

   $=1-\left[\frac{5^0}{0!}.e^{-5}+\frac{5^1}{1!}.e^{-5}\right]$

   $=1-[e^{-5}+5.e^{-5}]$

   $=1-6e^{-5}=0,96$

   E(X)=V(X)=λ=5

DOÇ.DR.PELIN KASAP

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. and Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.

DOÇ.DR.PELİN KASAP